XXXI SEMANA NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS

ECUACION DE ONDA ELÁSTICA: ALGUNOS DETALLES FISICOS Y MATEMÁTICOS.

Lamberto Castro Arce, Carlos A. de la Cruz L., Luis M. Lozano C., Rosa A. Vázquez C., Carlos Figueroa Navarro.
Universidad de Sonora, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

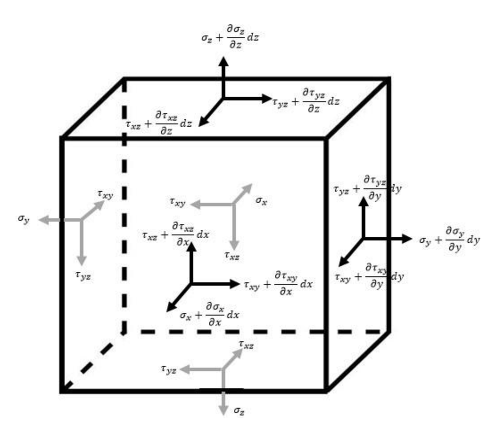
RESUMEN

La modelación de vibraciones mecánicas, a partir de las leyes de Newton y de la Teoría de Elasticidad son fundamentales en la deducción de la ECUACIÓN DE ONDA ELÁSTICA: en medios homogéneo o no homogéneos, y marcan la pauta para futuros trabajos en el campo de ondas acústicas y/o sónicas aplicadas a sistemas geofísicos. Se hará uso de los tensores de esfuerzos y deformaciones para la obtención de la ecuación diferencial, que al ser resuelta, genera respuestas factibles para la interpretación de la propagación de ondas

DESARROLLOS BÁSICOS

Ecuación de cantidad de movimiento (momento) en términos de tensores de esfuerzo (σ) y deformación (ε).

Se considera un medio continuo, es decir, que el sólido se da como una distribución continúa de materia obteniéndose un campo cuyas propiedades se definen por funciones continuas en coordenadas espaciales y del tiempo.



$$\sum \vec{F}_i = 0 \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \qquad \vec{F} = \frac{d}{dt} m\vec{v} \qquad \vec{F} = m\vec{a} \qquad F_{12} = -F_{21}$$

Los cálculos a priori quedarían sintetizados para cada eje siendo estos una sumatoria de fuerzas en la misma dirección, incluyendo las fuerza de cuerpo, teniéndose así en la dirección **x**:

$$\sigma_x dy\cdot dz + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\cdot dy\cdot dz - \sigma_x dy\cdot dz + \tau_{xy} dx\cdot dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\cdot dx\cdot dz - \tau_{xy} dx\cdot dz + \tau_{xz} dx\cdot dy + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\cdot dx\cdot dy - \tau_{xz} dx\cdot dy + X dx\cdot dy\cdot dz = 0$$

Se tiene entendido que la expresión anterior será similar para los ejes **y** y **z**, teniendo así:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\cdot dy\cdot dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\cdot dx\cdot dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\cdot dx\cdot dy + X dx\cdot dy\cdot dz = 0$$

Con las ecuaciones anteriores y empleando la segunda ley de Newton; además de saber que se cuenta con una masa , $m = \rho dx\cdot dy\cdot dz$ en donde el desplazamiento está regido por , $u_i = u(x,y,z)$ las fuer zas representadas como $\vec{F} = (\rho dx\cdot dy\cdot dz)\ddot{u}_i$ y que el sistema está en movimiento, queda expresado:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \rho \ddot{u}_i$$

Utilizando notación y operación indicial se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i = \rho \ddot{u}_i \qquad \sigma_{ij,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i$$

Esta ecuación expresa la cantidad de movimiento, pero requiere estar también términos de deformaciones: *Ut tensio sic vis.* "Como la extensión, así la fuerza".

Es decir que, $\sigma \propto \varepsilon$ y empleando la ley generalizada de Hooke, se expresa como: $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ Empleando propiedades de los tensores como la **simetría mayor:** $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$ que reduce de

81 componentes a solo 36 y la **simetría menor:** $C_{ijkl} = C_{klij}$, que reduce de las 36 constantes independientes a solo 21. Además se usa la definición de elasticidad isotrópica para que de 21 constantes elásticas se reduzcan a 2, quedando finalmente en notación indicial y parámetros de Lamé como:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

Al ser sustituciones, operaciones indiciales y utilizando la delta de Kronecker se tiene:

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\right)\varepsilon_{kl} \qquad \sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

Se sustituye la siguiente expresión y las anteriores en la ecuación de momento:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial\left(\lambda\delta_{ij}\epsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}\right)}{\partial x_j} + B_i = 0 \qquad \frac{\partial\left(\lambda\delta_{ij}\epsilon\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)}{\partial x_j} + B_i = 0$$

$$\delta_{ij}\epsilon\frac{\partial\lambda}{\partial x_j} + \lambda\epsilon\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial\epsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + B_i = 0$$

$$\epsilon\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + \lambda\epsilon\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\frac{\partial\epsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + B_i = 0$$

Si bien, algunas veces no es necesario tomar en cuenta la gravedad de la Tierra sino en algunos ca- sos cuando se está considerando las ondas de baja frecuencia, por tanto:

$$\epsilon\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + \lambda\epsilon\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\frac{\partial\epsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0$$

$$(\nabla\cdot u_i)\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + \lambda(\nabla\cdot u_i)\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot u_i) + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = 0$$

$$(\nabla\cdot u_i)\nabla\lambda + \lambda(\nabla\cdot u_i)\nabla\delta_{ij} + \lambda\nabla(\nabla\cdot u_i) + \nabla\mu(\nabla\cdot u_i) + \mu(\nabla^2 u_i) + \nabla\mu\left(\nabla\cdot u_j\right) + \mu\nabla(\nabla\cdot u_i) = 0$$

$$(\nabla\cdot u_i)\nabla\lambda + \lambda(\nabla\cdot u_i)\nabla\delta_{ij} + \lambda\nabla(\nabla\cdot u_i) + \nabla\mu(\nabla\cdot u_i) + \mu(\nabla^2 u_i) + \nabla\mu(\nabla\cdot u_i)^T + \mu\nabla(\nabla\cdot u_i) = 0$$

$$\nabla\lambda(\nabla\cdot u_i) + \nabla\mu\cdot\left(\nabla u_i + \nabla u_i^{\,T}\right) + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot u_i + \mu\nabla\nabla\cdot u_i - \mu\nabla\times\nabla\times u_i = \rho\ddot{u}_i$$

Si se hace una idealización de donde las capas son homogéneas los parámetros permanecen constantes y esos términos se vuelven cero en la ecuación. Entonces se tiene:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot u_i - \mu\nabla\times\nabla\times u_i = \rho\ddot{u}_i$$

Donde $\nabla\cdot u_i$ es la deformación volumétrica y $\nabla\times u_i$ es la deformación de cizalla, los cuales corresponden con los respectivos parámetros de Lamé .

CONCLUSIONES

En esta parte del trabajo solo se consideró el desarrollo matemático y su interpretación mediante conceptos físicos para un mejor entendimiento del tema. Si bien, representó un conflicto en primer término debido a la acentuación concreta del marco teórico de la investigación, en última instancia se logró el cometido del mismo, con ello y con ayuda de la aplicación de conocimientos previos adquiridos se presenta en este trabajo de investigación la ecuación de onda elástica en medios homogéneo y no homogéneo, que contextualizado, da la implementación de esta en sistemas geofísicos como la Tierra que se puede definir como un modelo de capas homogéneas para simplificar el problema y así dar un mejor entendimiento de lo que ocurre en el planeta cuando se produce un fenómeno físico de este tipo.